Slabá řešení pro třídu nelineárních integrodiferenciálních rovnic

V prezentované práci se zaměřujeme na zobecněný integrální model Oldroydova typu popisující proudění nestlačitelné viskoelastické nenewtonovské tekutiny ve třech dimenzích (matematická formulace v příloze). Tento model popisuje velmi širokou třídu tekutin. Příkladem vyzdvihujícím jeho důležitost v praxi je například proudění krve, která hlavně v drobnějších cévách vykazuje chování nenewtonovské viskoelastické tekutiny. Ačkoliv existuje více modelů a přístupů jak chování zmíněných tekutin popsat, práce se nesnaží o nalezení nejvhodnějšího z nich, ale zabývá se existencí a regularitou slabých řešení studovaného modelu. Pomocí metody regularit se nám daří získat regularitu slabých řešení a rozšířit tak výsledky z [Bárta T.: Generalized integral Oldroyd-type models for viscoelastic fluids], kde byla dokázána existence slabých řešení. Použitá metoda vychází z článku [Málek, Nečas, Růžička: On weak solutions to a class of non-newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case p = 2], kde je studován podobný model avšak s nulovou elasticitou. Práce ukazuje, že právě díky nenulové elasticitě je použitá metoda ne zcela přenositelná a naráží na problémy, které jsou v práci jasně identifikovány. Výsledkem je, že se nepodaří zobecnit výsledek o existenci slabých řešení a výsledky o regularitě slabých řešení jsou jen částečně uspokojivé. Přes tento zdánlivý neúspěch práce podává dílčí původní výsledky a posouvá tak úroveň poznání daného problému o krok vpřed.

Klíčová slova: Nelineární integrodiferenciální rovnice, existence a regularita slabých řešení, metoda regularit.

Matematická formulace problému

Hledáme dvojici $(\boldsymbol{u}, \pi)$ splňující

$$\begin{aligned}
\partial_t \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{u}(t)\nabla\boldsymbol{u}(t) = &- \nabla\pi(t) + \mathrm{div}\boldsymbol{F}(\mathbb{D}(\boldsymbol{u})(t)) \\
&+ \int_0^t G(t-s)\,\mathrm{div}\boldsymbol{H}(\mathbb{D}(\boldsymbol{u})(s))\,ds \,+ \boldsymbol{f}(t)\,, \\
\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = &\ 0\,,
\end{aligned}$$

v $(0,T) \times \Omega$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí a $T > 0$. Celý systém doplňujeme Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \text{v } (0,T)$$

a počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{v } \Omega\,.$$

Operátory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{H}$ jsou obecně nelineární, G je skalární fce.